Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 2

③ Заметим, что A - ортоцентр треугольника BKC, поскольку $CP \perp BK$ и $BA \perp CK$. => A - ортоцентр. Значит $K - A - E$. Нарисуем картинку к задаче:

(Отметим AB - диаметр => $\angle BDA = 90°$) по условию.

поскольку $AE \perp BC$ (AB - диаметр) и $KA \perp BC$ (A - ортоцентр)

$\Downarrow$

$K - A - E$.

Докажем, что $F \in (KC)$. Для этого отметим середину KC и докажем, что MD и MF - касательные к $(BDAK)$. Очевидно, что в таком случае $M \in FK$ и $F \in (KC)$. Посчитаем углы. $MD = MC$, поскольку KC - диаметр описанной $(KDEC) \Rightarrow MK = MD = ME = MC$

Можно использовать оборот листа для записи решений

Пусть $\angle FCD = \angle PPC$ (как накрест лежащие) $\angle PCD = \angle CFD$ (как внутренние), $\angle MED$ (МВЗС)

$\angle PBA$ (как внутренние DA || BC), Пусть $MP = MF = \angle PBA \Rightarrow MD$ - медиана $\triangle DAB$. Аналогично, MF - медиана $\triangle DAB$. Точка M - середина DB.

Пусть $MC = 2FB = 14$.

Пусть $R_{BCK} \quad \frac{MC}{2\sin\angle CBD} = 2R \Rightarrow R = \frac{MC}{2\sin\angle CBD} = \frac{14}{2 \cdot 0,7} = \frac{14}{1,4} = 10$

4. $P(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy^2 + 3x^2y - 2x - y$

Пусть $x = y$. Пусть i

$P(x,x) = 8x^3 + x^3 - 12x^3 + 3x^3 - 2x - x = -3x$.

Значит надо число, кратное 3 мы можем представить. Докажем, что другие числа мы представить не можем. Рассмотрим все остатки, которые может принимать $P(x,y)$ по mod 3.

1) $x \equiv 1, y \equiv 0$. $P(x,y) \equiv 0 \pmod 3$

2) $x \equiv 0, y \equiv 1$. $P(x,y) \equiv 0 \pmod 3$

3) $x \equiv 1, y \equiv 1$ $P(x,y) \equiv 8 + 1 - 12 + 3 - 2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$

4) $x \equiv 1, y \equiv 2$ $P(x,y) \equiv 8 + 8 - 48 + 6 - 2 - 2 \equiv 0 \pmod 3$

5) $x \equiv 2, y \equiv 1$ $P(x,y) \equiv 8 \cdot 8 + 1 - 12 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 4 - 1 \equiv 0 \pmod 3$

6) $x \equiv 0, y \equiv 0$ $P(x,y) \equiv 0 \pmod 3$

olymp.bmstu.ru

Вариант задания 2

(1) Рассмотрим левую часть ленты и все комбинации цветов, которые могут быть на этой ленте, а потом сопоставим их комбинации на правой ленте.

I) 3 синих - левая; 2 с, 1 б - правая

Тогда кол-во вариантов равно

$2^3 \cdot \frac{24 \cdot 3}{8} (8+8+8)$, т.к. на правой ленте можем 3 цвета

Т.к. при комбинации (б с с / с б с / с с б) и т.д. для каждой из них мы можем всегда сопоставить выбрать ленту и не выворачивать носок или нет

II) 2 синих, 1 с - левая; 1 - синий, 1 - синий, 1 - серый - б.

Тогда кол-во вариантов равно:

$(3 \cdot 8)(3! \cdot 3) = 24 \cdot 48$

левая (правая (3! - кол-во перестановок Син, Бел, Сер

III) 2 Син, 1 Бел - левая, 1 Син, 2 Сер - правая.

Кол-во вариантов: $(3 \cdot 8)(3 \cdot 8) = 24 \cdot 24$

IV) 1 Син, 2 Сер - левая; 2 Син, 1 Бел - правая.

Кол-во вариантов: $(8 \cdot 3)(8 \cdot 3) = 24 \cdot 24$

V) 1 Син, 1 Сер, 1 Бел - левая; 2 Син, 1 Сер - правая.

Кол-во способов: $(3! \cdot 3)(3 \cdot 8) = 48 \cdot 24$

$\sum = 24(8 + 48 + 24 + 24 + 48) = 152 \cdot 24 =$

$= 3648.$

Можно использовать оборот листа для записи решений

② Заметим, что $(3+\sqrt{11})^{75} + (3-\sqrt{11})^{75} = x$, где $x \in \mathbb{N}$

$(3+\sqrt{11})^{75} = 3^{75} + C_{75}^{1} 3^{74}\sqrt{11} + C_{75}^{2} 3^{73}(\sqrt{11})^2 + \dots + (\sqrt{11})^{75}$

$+$

$(3-\sqrt{11})^{75} = 3^{75} - C_{75}^{1} 3^{74}\sqrt{11} + C_{75}^{2} 3^{73}(\sqrt{11})^2 - \dots - (\sqrt{11})^{75}$

$2\left(3^{75} + C_{75}^{2} 3^{73} 11 + \dots\right) \in \mathbb{N}$.

(все промежуточные члены сократились)

Лемма: $(3+\sqrt{11})^{75} = X + (\sqrt{11}-3)^{75}$.

(доказательство сокр.)

$\left(\frac{\sqrt{11}-3}{1}\right)^{75} = \left(\frac{2}{\sqrt{11}+3}\right)^{75} = \frac{2^{75}}{(3+\sqrt{11})^{75}}$

Докажем, что:

$\frac{2^{75}}{(3+\sqrt{11})^{75}} ? \frac{1}{10^{30}}$

$2^{75} \cdot 10^{30} ? (3+\sqrt{11})^{75}$, докажем, что $3+\sqrt{11} > 6$ ($\sqrt{11} > 3$)

тогда докажем сл. неравенство:

$2^{75} \cdot 10^{30} ? 6^{75} \Rightarrow 10^{30} ? 3^{75}$.

$10 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{10}{9} \Rightarrow 10^{30} = \left(3^2 \cdot \frac{10}{9}\right)^{30} = 3^{60} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^{30} ? 3^{75}$

$\left(\frac{10}{9}\right)^{30} < 3^{15}$.

$\left(\frac{10}{9}\right)^{2} < 3$, т.к. $\left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{100}{81}$. Тогда данное неравенство верно. Значит первые 30 цифр в десятичной записи числа $(\sqrt{11}-3)^{75}$ это цифры $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предпоследняя цифра в десятичной записи числа $(3+\sqrt{11})^{75}$ является цифрой.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

а)

1) $x \geq 2, y \geq 0 \Rightarrow f(x,y) \geq 6 \cdot 4 - 4 \geq 60 \geq 0$ (чтд)

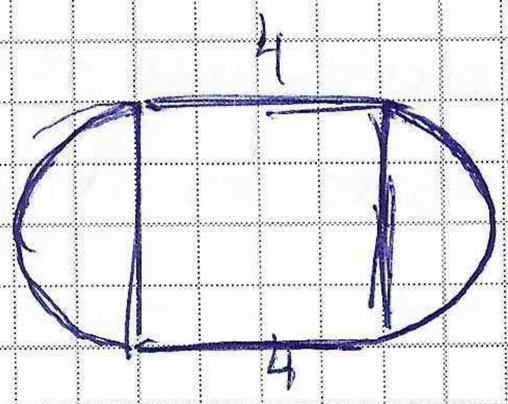
2) $x \geq 0, y \geq 2 \Rightarrow \phi(x,y) \geq 6 \geq 0$ (чтд)

Таким мы нашли предположительно наименьшее из них, нужно все таки найти сами предположительно

$$\frac{(10.00.000 - 1)}{3} \cdot 2 = \frac{99\,999\,998}{3} \cdot 2 = 33\,333\,333$$

б)

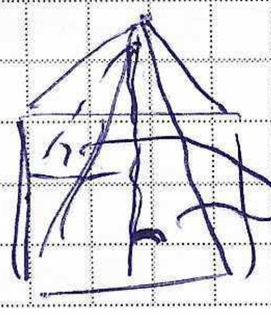
Сколько нужно добавить отдельно?



а) Не перегружено

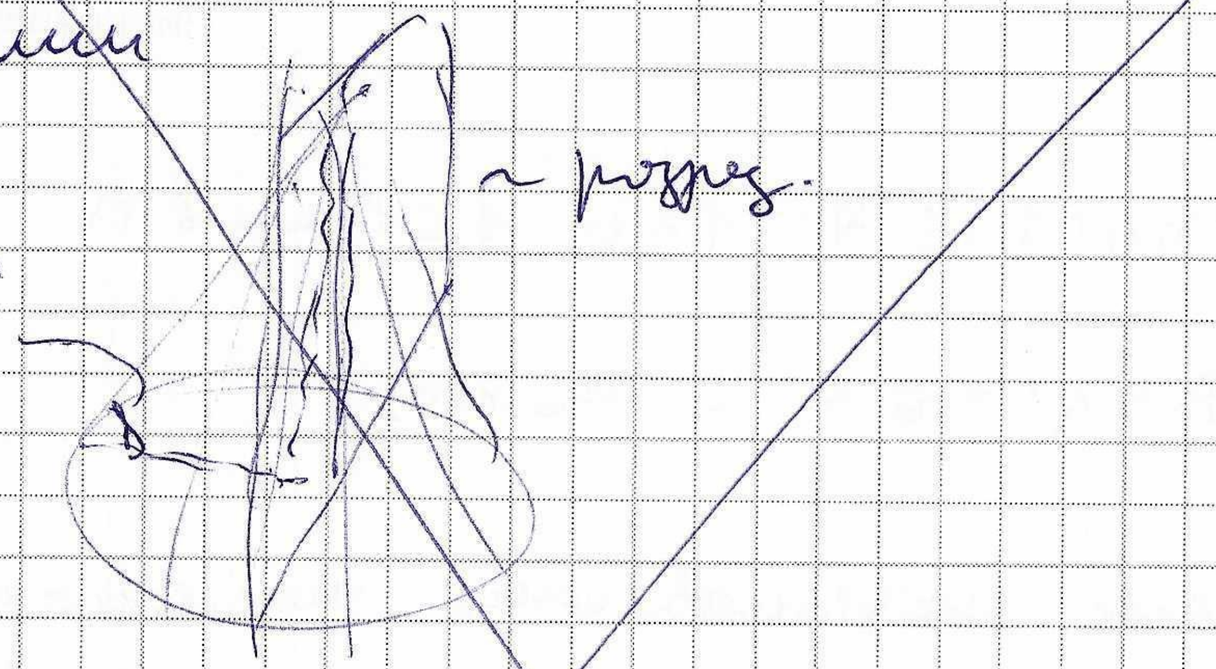


Заметим, что максимальный объем снега должен лежать, когда его уровень только достигает уровня под 45° к плоскости стадиона. Гаражей нам стадион на три поднимает и вдвое. Тогда при максимальном объеме снега он представляет собой пирамиду с углом в 90° градусов (для квадрата)



Можно использовать оборот листа для записи решений

Для построения сечения будет достаточно в виде
конуса пирамиды, наклонными с углов 45° при
основании



Тогда общий объем тела будет:

$V = V_{пирамиды} + V_{конуса} = \frac{1}{3} S_{осн} h + \frac{1}{3} S_{кон} \cdot h$ (2)

Главная задача определить все
данные нам в одну
нашу всему цилиндру!

(2) $\frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{32 + 8\pi}{3}$.

($h = 2$, высота при основании 45°).

$8\pi \approx 25,12 \Rightarrow 32 + 8\pi \approx 57,12 \Rightarrow$ **$V \approx 19,04$**

Если мы разрезали пирамиду конус на две
слои одинаковой толщины, то объем верхнего, и
объем нижнего относились как $\frac{1}{8}$. Тогда



$S_{осн} \cdot h$

$S_B = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}h) \cdot (\frac{1}{2})^2 S = \boxed{\frac{1}{8} h S}$. Тогда

$V_{всего} = \frac{1}{8} V_{всего} \cdot \frac{7}{8} + \frac{8}{8} \cdot V_{всего} \cdot \frac{7}{8} = V_{всего}$.

$(\frac{7}{45} + \frac{38}{45}) = \frac{34}{45} \cdot V_{всего}$.

olymp.bmstu.ru

$V_{воды} = \frac{1}{8} \cdot V_{сосуда} \cdot 0,4 + \frac{7}{8} \cdot V_{сосуда} \cdot 0,8 =$

$= V_{сосуда} \left(\frac{2}{40} + \frac{28}{40} \right) = V_{сосуда} \cdot \frac{30}{40} = \frac{3}{4} V_{сосуда}.$

$\frac{75}{100} V_{сосуда} = \frac{14 \cdot 28}{100} = 14,28 \approx 14,3$

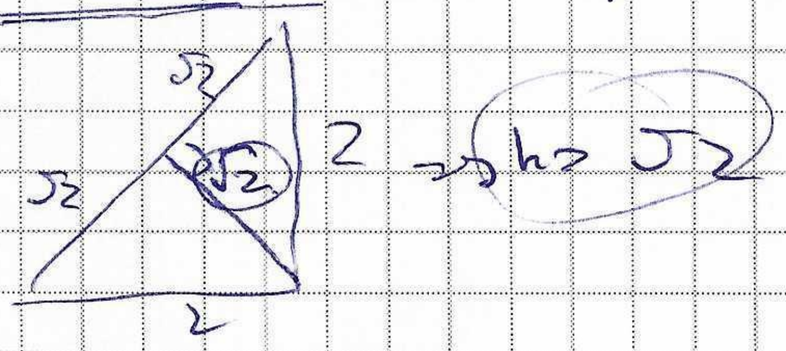
Полученный объем фигуры состоит из конуса, полусферы, расположенных

подобно: 

Это конус объем фигуры вращения (синяя область). Он равен:

$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{8}{3} \pi$. Полученный объем, которую мы

отсекаем. Он равен, $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 \pi \cdot 2 \cdot 2$



$\rightarrow h = 2\sqrt{2}$

S - это площадь полукруга с радиусом $2\sqrt{2}$. Он равен

$(\pi \cdot (2\sqrt{2})^2) \frac{1}{2} = (8\pi)$. Значит $V_{усеченного} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot$

$\cdot \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \right]$. Умножим это на 2 и вычтем весь

объем. Тогда мы получим объем усеченной части: $\frac{8\pi}{3} - \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \pi}{3} = \frac{\pi(8 - 2 \cdot 2\sqrt{2})}{3}$

Тогда общий объем снова равен:

$V_{ук.конуса} = V_{цилиндра} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{\pi(8-2\sqrt{3})}{3} = \frac{32}{3} + \pi(8-2\sqrt{3})$

Угол в конусе равен, объем верхней части и объем всей фигуры

$V_{верха} = \frac{1}{8} V_{всего} \cdot \frac{2}{5} + \frac{7}{8} \cdot V_{всего} \cdot \frac{4}{5} = V_{всего} \cdot \left(\frac{2}{40} + \frac{28}{40}\right) =$

$= \frac{3}{4} V_{всего}$

Тогда $V_{воды} = \frac{32}{4} + \pi(8-2\sqrt{3}) = 8 + \pi(2-\frac{\sqrt{3}}{2})$

